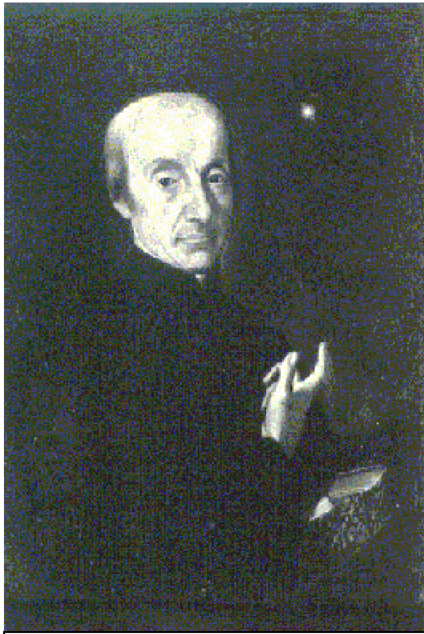
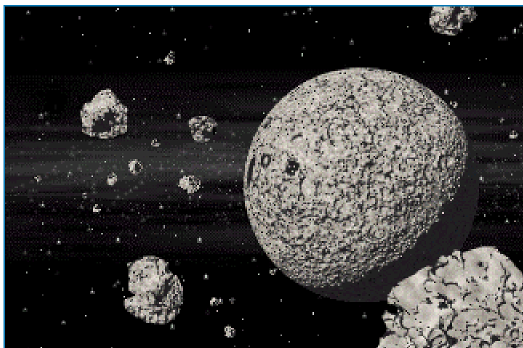


Ο Αστρονόμος Piazzi

Αστεροειδής Ceres

Τον Ιανουάριο του 1801 ο αστρονόμος Piazzi παρατήρησε για λίγο έναν νέο πλανήτη, και αμέσως τον έχασε (σήμερα είναι γνωστό οτι επρόκειτο για τον αστεροειδή Ceres). Οι προσπάθειες των αστρονόμων να τον εντοπίσουν παρέμειναν άκαρπες. Τον Δεκέμβριο του ίδιου έτους ο Gauss υπέδειξε, που να τον αναζητήσουν και μάλιστα προέβλεψε και την μελλοντική του θέση σε κάθε χρονική στιγμή. Τότε ο Gauss δεν είχε αποκαλύψει την μέθοδό του και έφτασε να κατηγορηθεί ακόμα και για μαγεία. Μόνο το 1809 αποκάλυψε οτι κατάφερε να τον εντοπίσει, υποθέτοντας ελλειπτική τροχιά και αναπτύσσοντας συστηματικά την μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων του Legendre.

Υποθέτουμε οτι η εξίσωση της ελλειπτικής του τροχιάς, αναφέρεται στους κύριους άξονες της και οτι (x_i, y_i), i=1, 2, ..., ν είναι οι συντεταγμένες του πλανήτη στο επίπεδο όπου αυτός παρατηρήθηκε. Να βρεθεί με χρήση γενικευμένου αντιστρόφου η λύση ελαχίστων τετραγώνων για την τροχιά του, αν γνωρίζουμε τις 4 συντεταγμένες (1, 1), (0, 2), (-1, 1), (-1, 2)



Λύση

Αφού η εξίσωση της ελλειπτικής τροχιάς αναφέρεται στους κύριους άξονες της, θεωρούμε ότι η έλλειψη αυτή, έχει εξίσωση της μορφής

$$c:\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad \textbf{(1)}$$

θέτουμε $\frac{1}{a^2}=k$ και $\frac{1}{b^2}=l$ οπότε η (1) γίνεται:

$$c: kx^2+ly^2=1 \qquad \textbf{(2)}$$

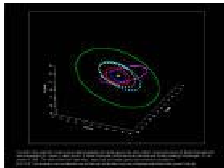
Όμως τα σημεία Α(1, 1), Β(0, 2), Γ(-1, 1) και Δ(-1, 2) ανήκουν στην έλλειψη συνεπώς οι συντεταγμένες τους θα επαληθεύουν την **(2)**. Δηλαδή :

$$\begin{cases} A\in c \\ B\in c \\ G\in c \\ D\in c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k+l=1 \\ 0k+4l=1 \\ k+l=1 \\ k+4l=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k+l=1 \\ 0k+4l=1 \\ k+4l=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow AX=B$$

όπου $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 4\\ 1 & 4\end{bmatrix}$, $X=\begin{bmatrix}k\\ l\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}$.

Όμως $\begin{cases}k+l=1\\ 0k+4l=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}k=\frac{3}{4}\\ l=\frac{1}{4}\end{cases}$

και το ζεύγος $(k,l)=(\frac{3}{4},\frac{1}{4})$ δεν επαληθεύει την εξίσωση $k+4l=1$.



Άρα το σύστημα $AX=B$ είναι αδύνατο.
Γνωρίζουμε οτι η λύση ελαχίστων τετραγώνων *** ενός μη συμβιβαστού συστήματος $AX = B$, mxn, ικανοποιεί την εξίσωση $A^TA\overline{X}=A^TB$.

Αν οι στήλες του πίνακα A είναι γραμμικά ανεξάρτητες, τότε ο πίνακας A^TA αντιστρέφεται και ισχύει οτι: $\overline{X}=(A^TA)^{-1}A^TB$.

Εξετάζουμε αν οι στήλες του πίνακα $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 4\\ 1 & 4\end{bmatrix}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

Έστω $c_1,c_2 \in R : c_1\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 1\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}1\\ 4\\ 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}c_1+c_2=0\\ 0c_1+4c_2=0\\ c_1+4c_2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}c_1=0\\ c_2=0\end{cases}$

Συνεπώς οι στήλες του A είναι γραμμικά ανεξάρτητες, δηλαδή ο 2x2 τετραγωνικός πίνακας A^TA αντιστρέφεται, και ο γενικευμένος αντίστροφος του $(A^TA)^{\perp}$ ταυτίζεται με τον συνήθη αντίστροφό του $(A^TA)^{-1}$.

Τότε $A^TA\overline{X}=A^TB \Leftrightarrow \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 4 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 4\\ 1 & 4\end{bmatrix}\overline{X}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 4 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{bmatrix} \Leftrightarrow$

$$\begin{bmatrix}2 & 5\\ 5 & 33\end{bmatrix}\overline{X}=\begin{bmatrix}2\\ 9\end{bmatrix} \quad \textbf{(3)}$$

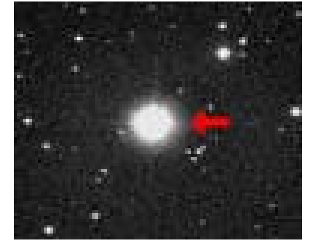
Όμως $\det(A^TA)=66-25=41\neq 0$

Άρα ο A^TA αντιστρέφεται και $(A^TA)^{\perp}=(A^TA)^{-1}=\dfrac{1}{\det(A^TA)}\begin{bmatrix}33 & -5\\ -5 & 2\end{bmatrix} \Rightarrow$

$$(A^TA)^{\perp}=(A^TA)^{-1}=\frac{1}{41}\begin{bmatrix}33 & -5\\ -5 & 2\end{bmatrix}.$$

Συνεπώς η **(3)** γράφεται:

$$\begin{bmatrix}2 & 5\\5 & 33\end{bmatrix}\overline{X}=\begin{bmatrix}2\\9\end{bmatrix}\Leftrightarrow\frac{1}{41}\begin{bmatrix}33 & -5\\-5 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 5\\5 & 33\end{bmatrix}\overline{X}=\frac{1}{41}\begin{bmatrix}33 & -5\\-5 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\9\end{bmatrix}\Leftrightarrow$$



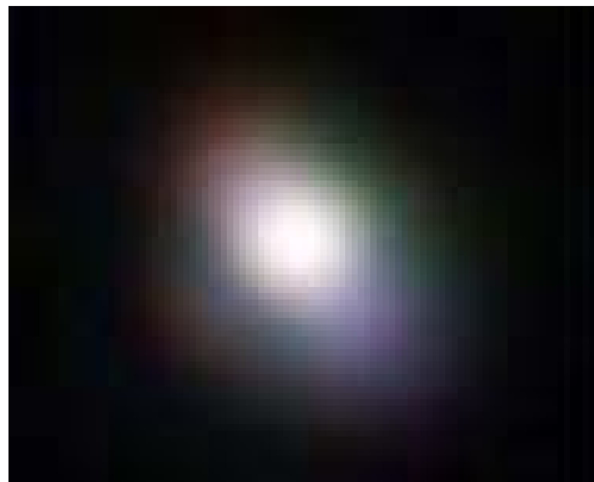
$$I_2\overline{X}=\frac{1}{41}\begin{bmatrix}21\\8\end{bmatrix}\Leftrightarrow\overline{X}=\begin{bmatrix}\frac{21}{41}\\\frac{8}{41}\end{bmatrix}.$$

Συνεπώς η εκτίμηση ελαχίστων τετραγώνων για τους k, l είναι η $\begin{cases}k = \frac{21}{41}\\ l = \frac{8}{41}\end{cases}$

Συνεπώς η **(2)** γράφεται: $\frac{21}{41}x^2+\frac{8}{41}y^2=1\Leftrightarrow\frac{x^2}{\frac{41}{21}}+\frac{y^2}{\frac{41}{8}}=1\Leftrightarrow\frac{x^2}{\left(\sqrt{\frac{41}{21}}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\sqrt{\frac{41}{8}}\right)^2}=1.$

Άρα η λύση ελαχίστων τετραγώνων για την ελλειπτική τροχιά του αστεροειδούς είναι η

$$c:\frac{x^2}{\left(\sqrt{\frac{41}{21}}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\sqrt{\frac{41}{8}}\right)^2}=1$$

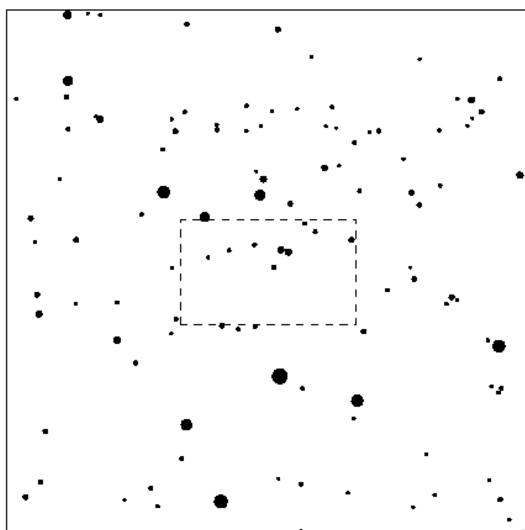


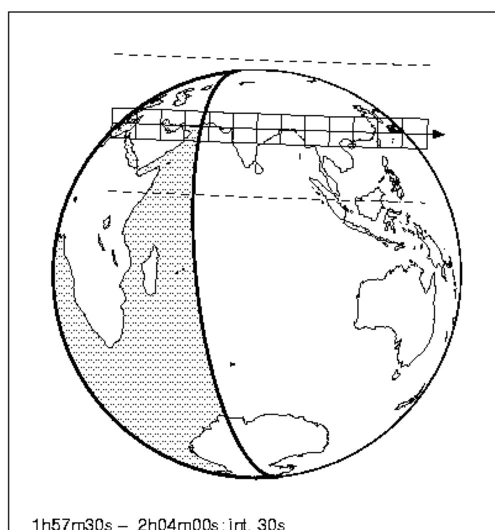
Ουρανογραφικά στοιχεία του Ceres

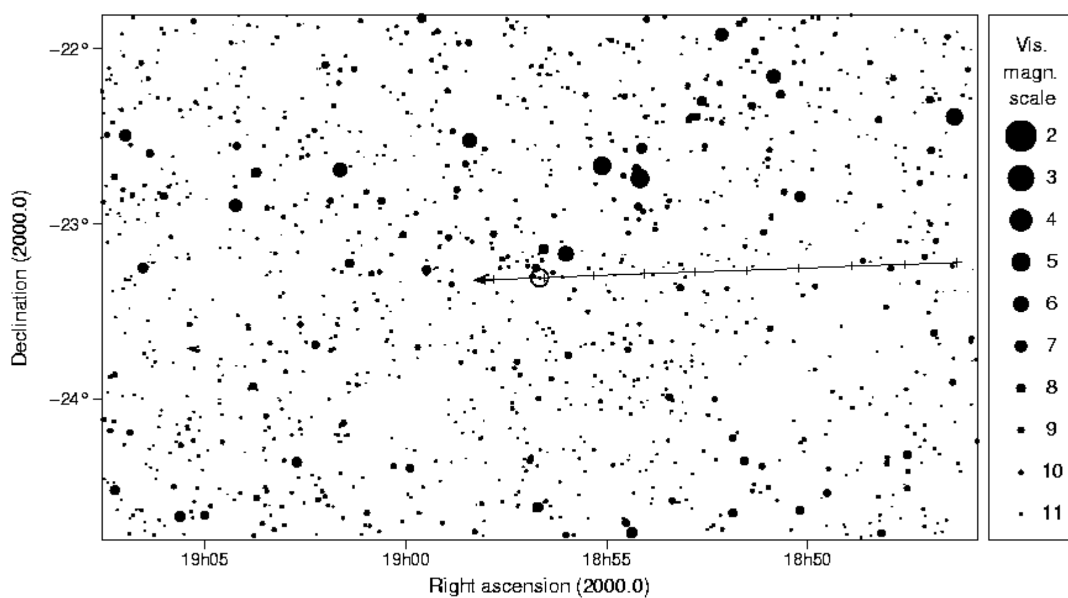
1 Ceres – TYC 6860-00966-1

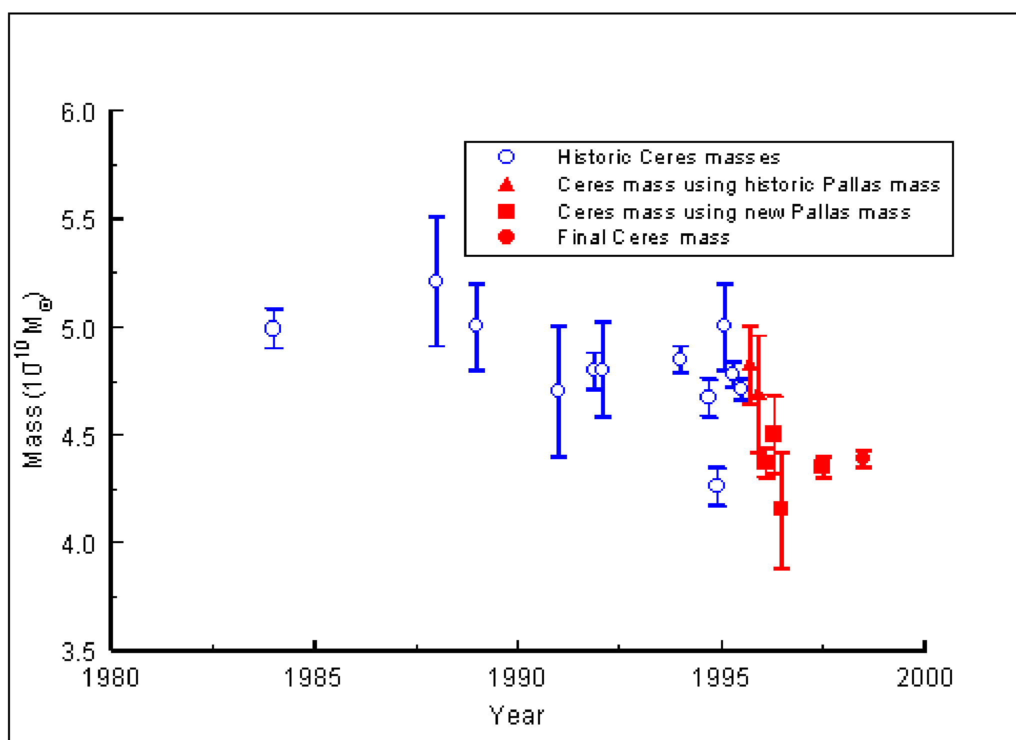
2001 mar 16 $2^h\,0.6^m$ U.T.

Planet :			Star :	Source kat. TYC2
V. mag. = 8.97	Diam. = 932.6 km = 0.43"		$\alpha = 18^h 56^m 40.233^s$	$\delta = -23°18'41.42"$
μ = 42.71"/h	π = 2.97"	Ref. = EG1997-059	V. mag. = 11.16	Ph. mag. = 11.04
Δm = 0.1	Max. dur. = 36.7s		Sun : 72°	Moon : 26° , 58%









Προσδιορισμός-μεταβολή της μάζας του Ceres με τα έτη και με την μέθοδο μέτρησης.